

Quiver から得られる nilpotent Lie 代数と幾何構造

大阪公立大学 大学院理学研究科 数学専攻

溝口史華 (Fumika MIZOGUCHI) *

概要

微分幾何学において、与えられた Lie 群が特別な幾何構造を許容するかどうかを調べることは重要な問題である。しかし、一般に特別な幾何構造を許容する Lie 群を分類することは困難である。特に、nilpotent や solvable Lie 群に関しては、体系的な分類も難しく、一般的な議論が難しいという現状がある。本講演は、quiver から nilpotent Lie 代数を構成するという新たな方法を紹介する。さらに、得られた nilpotent Lie 代数に対応する単連結 Lie 群は、すべて左不変 Ricci soliton Riemann 計量を許容することについて述べる。また、Ricci-flat 擬 Riemann 計量や symplectic 構造などの他の左不変幾何構造についての結果も述べる。本講演の一部は、田丸博士氏との共同研究に基づく。

1 導入

与えられた多様体が特別な幾何構造を許容するかどうかを調べることは、微分幾何学において重要な問題である。多様体の中でも、Lie 群は左不変幾何構造を付随し、特別な左不変幾何構造を許容する Lie 群の分類も基本的な問題の一つである。しかし、特定の幾何構造に関して、すべての Lie 群を分類することは困難である。実際、Lie 群上の左不変 Einstein Riemann 計量の分類は、5 次元以下でしか達成されていない。

また、Lie 群の研究には Lie 代数が密接に関係しており、単連結 Lie 群とそれに付随する左不変計量は、Lie 代数とその内積に対応する。Lie 代数の観点から Lie 群上の左不変幾何構造を調べることができる。すべての Lie 代数は、Levi 分解によって semi-simple part と solvable part に分けられる。semi-simple Lie 代数は完全な分類がなされているのに対し、solvable Lie 代数はその部分代数である nilpotent Lie 代数でさえ分類がなされていない。このことから、nilpotent Lie 群上の幾何構造について一般的な議論を行うことは困難となっている。

定義 1.1 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して、 $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ 、 $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g}]$ とする。このとき、 $\mathfrak{g}^{m-1} \neq 0$ 、 $\mathfrak{g}^m = 0$ を満たすならば、Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を m -step nilpotent Lie 代数という。

nilpotent Lie 代数は、2-step の場合に盛んに研究されている。2-step nilpotent Lie 代数の具体例の一つに、§2.1 で紹介するグラフから得られる nilpotent Lie 代数がある。この方法で得られた 2-step nilpotent Lie 代数上の幾何構造について様々な研究がなされている。しかし、step 数が高い場合は扱いやすい具体例が少ない。このことから、扱いやすい step 数の高い nilpotent Lie 代数を構成することは重要である。また、nilpotent Lie 群上の幾何構造は興味深い具体例を多く供給する。例えば、nilpotent Lie 群は、Einstein でない Ricci soliton Riemann 計量を許容する例を多く持つ。加えて、Ricci soliton Riemann 計量を許容する nilpotent Lie 群は、solvable Lie 群や等質多様体全体への寄与も大きい。nilpotent Lie 群は、その他の幾何構造についても非常に興味深い対象である。

本研究は、quiver から Lie 代数を構成する。quiver とは、ループと多重辺を許す有向グラフである。quiver の矢 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ に対して、各矢の始点と終点が一致するとき、矢の列 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ を道といい、 m を道の長さという。quiver に対して、道で張られる空間上に積を定めたものを道代数という。この積を用いて、括弧積を定義することで Lie 代数を構成する。cycle を含まない有限 quiver から得られる Lie 代数は nilpotent で、step 数は

* E-mail: sw23882u@st.omu.ac.jp

quiver の道の最大値である。したがって、この方法により任意の step 数の nilpootent Lie 代数を得られる。これらの nilpotent Lie 代数は、quiver の矢のつながりから括弧積を定めているので計算が比較的容易で扱いやすい。本研究では、この方法で得られた nilpotent Lie 群が Ricci soliton Riemann 計量のような特別な幾何構造を許容するかどうかを調べる。

2 既知の例

以下では、nilpotent Lie 代数を構成する方法を紹介する。

2.1 グラフから得られる nilpotent Lie 代数

一つ目は、グラフから得られる nilpotent Lie 代数である。集合 V と集合 $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$ の組 $\Gamma = (V, E)$ を単純有向グラフという。 V の元を頂点といい、 E の元を辺という。 辺 $e = (x, y)$ に対して、 x を e の始点といい、 y を e の終点という。 単純有向グラフから次のように 2-step nilpotent Lie 代数を定義する。

定義 2.1 (Dani-Mainkar, [DM]) 単純有向グラフ $\Gamma = (V, E)$ に対して、

$$\mathfrak{n}_\Gamma := \text{span}(V \cup E),$$

$$[x, y] = \begin{cases} e & (x, y \in V, e = (x, y)), \\ -e & (x, y \in V, e = (y, x)), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

とすると、2-step nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_\Gamma$ を得る。

2.2 ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数

2 つ目は、ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数である。ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数とは、次の例のように行列をブロック分割して、その対角ブロックとそれより下のブロックが 0 となるような行列全体のことである：

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & x_1 & x_5 & x_8 \\ 0 & 0 & x_2 & x_6 & x_9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

この方法は、3-step 以上の nilpotent Lie 代数を構成できる。

3 quiver から得られる Lie 代数

3.1 quiver

定義 3.1 集合 V, E , 写像 $s, t: E \rightarrow V$ に対して、組 $Q = (V, E, s, t)$ を quiver という。 V の元を 頂点 , E の元を 辺 , $\alpha \in E$ に対して、 $s(\alpha)$ を 始点 , $t(\alpha)$ を 終点 という。

定義 3.2 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ に対して、 $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ ($1 \leq i \leq n-1$) であるとき、 辺の列 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ が 道 であるという。 このとき、 n を 道の長さ という。

例 3.3 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{a, b, c, d, e\}$ とし、 $s(a) = v_1, s(b) = v_2, s(c) = v_3, s(d) = v_3, s(e) = v_4, t(a) = v_2, t(b) = v_4, t(c) = v_4, t(d) = v_4, t(e) = v_5$ とすると quiver となり、図示すると、図 1 のようになる。

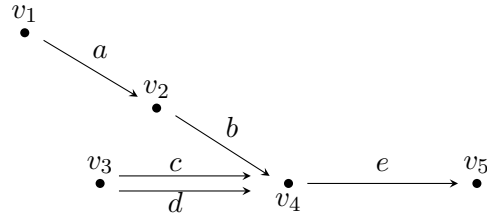


図1 例3.3の quiver

この quiver の道は, $a, b, c, d, e, ab, be, ce, de, abe$ の 10 個.

quiver Q の道 $x = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ に対して, 道 x の始点は, $s(\alpha_1)$ であり, $s(x)$ と書き, 道 x の終点は, $t(\alpha_n)$ であり, $t(x)$ と書く.

3.2 nilpotent Lie 代数の構成

定義 3.4 quiver $Q = (V, E, s, t)$ に対して, Q のすべての道の集まりを $\text{Path}(Q)$ とし, $\mathfrak{n}_Q$ を次で定める:

$$\mathfrak{n}_Q := \text{span Path}(Q).$$

また, $x, y \in \text{Path}(Q)$ に対して, 積と括弧積を

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (t(x) = s(y)), \\ 0 & (t(x) \neq s(y)), \end{cases} \quad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

と定めると, $\mathfrak{n}_Q$ は Lie 代数となる. これを Q から得られる Lie 代数 という.

注意 3.5 $\mathfrak{n}_Q$ に積 $\cdot$ を入れたものは道代数として既に知られている. 道代数の場合は, 頂点を長さ 0 の道として含めるのが一般的である. 今回は, 長さ 1 以上を道として扱う.

quiver Q の道 x に対して, $s(x) = t(x)$ であるとき, x を cycle という. 辺が有限集合である有限 quiver が cycle を含まないとき, quiver のすべての道の長さの最大値が存在する. これを quiver の長さ という.

命題 3.6 Q を cycle を含まない有限 quiver とすると, $\mathfrak{n}_Q$ は有限次元の nilpotent Lie 代数となる. また, 長さが m の quiver から得られる Lie 代数は, m -step nilpotent Lie 代数である.

3.3 例

例 3.7 次の図 2 の quiver から得られる Lie 代数 $\mathfrak{n}$ は 3 次元 Heisenberg 代数と同型.



図2 例3.7

例 3.8 次の図 3 の quiver から得られる Lie 代数は $\mathfrak{n} = \text{span}\{a, b, c, d, ac, bc, cd, acd, bcd\}$ で次と同型:

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & x_1 & x_5 & x_8 \\ 0 & 0 & x_2 & x_6 & x_9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

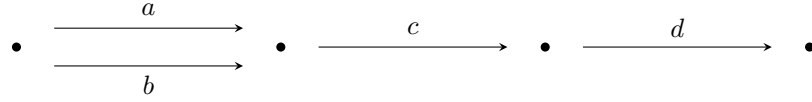


図3 例 3.8

3.4 既知の例との比較

以下では, quiver から得られる nilpotent Lie 代数と §2 で紹介した既知の方法で得られる具体例を比較する. まずは, グラフから得られる nilpotent Lie 代数と比較する. グラフから Lie 代数を構成する方法は, 2-step nilpotent Lie 代数しか得られない. quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step の場合は, 図 4 のような quiver から得られる nilpotent Lie 代数の直和である. 図 4 のような quiver を (m, n) -type quiver と呼ぶ. ただし, $m \geq 1, n \geq 0$ であり, $(1, 0)$ -type quiver から得られる Lie 代数は abelian である.

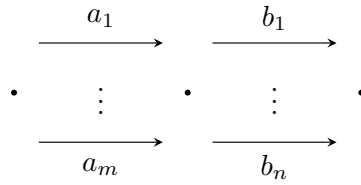


図4 The (m, n) -type quiver

(m, n) -type quiver から得られる nilpotent Lie 代数は, 図 5 のような (m, n) 完全 2 部グラフから得られる nilpotent Lie 代数と同型である. したがって, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step の場合は, 単純有向グラフから nilpotent Lie 代数を構成する方法によって得られる. しかし, 単純有向グラフからは 3-step 以上の nilpotent Lie 代数が得られないので, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 3-step 以上の場合はグラフ方法では得られない.

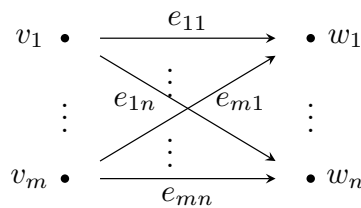


図5 (m, n) 完全 2 部グラフ

次に, 例 3.7, 例 3.8 は, ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数である. しかし, ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数には quiver から得られないものが存在する. また, quiver から得られる nilpotent Lie 代数には, ブロック分割から得られないものが存在する.

- 次の Lie 代数は quiver からは得られない.

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & x_1 & x_2 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- 次のような図 6 の quiver から得られる nilpotent Lie 代数は, ブロック分割からは得られない.

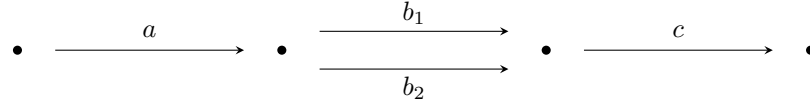


図 6 ブロック分割から得られない nilpotent Lie 代数

この quiver の長さ 1 の道は 4 本, 長さ 2 の道は 4 本, 長さ 3 の道が 2 本である. これを満たすブロック分割は存在しない.

4 主結果

以下では, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が特別な左不変幾何構造を許容するかどうかについて述べる. 本研究では, Ricci soliton Riemann 計量, Ricci-flat 擬 Riemann 計量, 左不変 symplectic 構造に関して結果を得た. 以降, 簡単のため幾何構造や定理は Lie 代数の視点で述べる.

4.1 Ricci soliton Riemann 計量

定義 4.1 内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ が 代数的 Ricci soliton であるとは, $c \in \mathbb{R}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して, 次を満たすこと:

$$\text{Ric} = c \cdot \text{id} + D.$$

一般に, 与えられた nilpotent Lie 群が Ricci soliton Riemann 計量を許容するかどうかは不明である. §2 で紹介した例に関して, 以下のような結果が知られている.

定理 4.2 (Lauret-Will, [LW]) グラフから得られる Lie 代数が, 代数的 Ricci soliton を許容するのは, グラフが “positive” のときである.

定理 4.3 (Tamaru, [T]) ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

quiver から得られる nilpotent Lie 代数において, 次を示した.

定理 4.4 (M.-Tamaru, [MT]) cycle を含まない有限 quiver Q に対して, Q から得られる nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ は, 代数的 Ricci soliton を許容する.

4.2 Ricci-flat 擬 Riemann 計量

定義 4.5 不定値内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対して, $\text{Ric} = 0$ を満たすとき, $\mathfrak{g}$ が Ricci-flat であるという.

Riemann 計量とは異なり, 擬 Riemann 計量においては nilpotent Lie 群がいつ Ricci-flat を許容するか解明されていない. そのため, グラフから得られている nilpotent Lie 代数上においても研究がなされており, 次の定理が知られている.

定理 4.6 (Conti-del Barco-Rossi, [CDR]) グラフから得られる nilpotent Lie 代数はすべて Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容する.

2-step の場合は, quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られるので, 次が示される.

定理 4.7 長さ 2 の quiver Q に対して, Q から得られる 2-step nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ は Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容する.

3-step 以上の場合はグラフから得られないので, いつ Ricci-flat Riemann 計量を許容するかは不明である.

4.3 symplectic 構造

定義 4.8 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 2-form ω が symplectic 構造 であるとは, $d\omega = 0$ and $\omega^n \neq 0$ を満たすことである.

定理 4.9 (Pouseele-Tirao, [PT]) 単純有向グラフ $\Gamma = (V, E)$ に対して, Γ から得られる nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_\Gamma$ が symplectic 構造を許容する必要十分条件は, $\mathfrak{n}_\Gamma$ の偶数次元であり, $\#E \leq \#V$ を満たすことである.

2-step の場合は, quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られるので, 次が示される.

定理 4.10 長さ 2 の quiver Q に対して, Q から得られる 2-step nilpotent Lie 代数が symplectic 構造を許容する必要十分条件は, 以下である:

- (i) $\mathfrak{n}_Q$ は偶数次元,
- (ii) Q の連結成分は以下のような $(2, 2)$, $(1, n)$, $(n, 1)$, $(1, 0)$ -type quiver のいずれか.

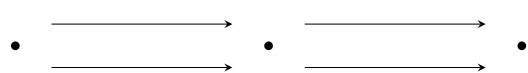


図 7 $(2, 2)$ -type

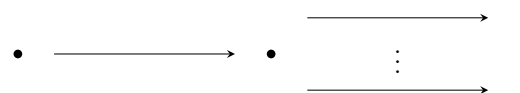


図 8 $(1, n)$ -type

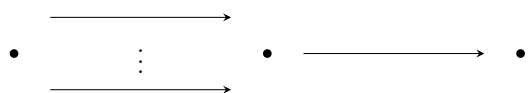


図 9 $(n, 1)$ -type



図 10 $(1, 0)$ -type

3-step 以上の場合はグラフから得られないので, いつ symplectic 構造を許容するかは不明である.

参考文献

- [ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A., “Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory”, London Math. Soc. Stud. Texts, 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. x+458 pp.
- [CDR] Conti, D., del Barco, V. and Rossi, F. A., “Diagram involutions and homogeneous Ricci-flat metrics”, Manuscripta Math. **165** (2021), no. 3-4, 381–413.
- [DM] Dani, S. G. and Mainkar, M., “Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs”, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 6, 2235–2251.
- [LW] Lauret, J. and Will, C., “Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions”, Math.

Ann. **350** (2011), no. 1, 199–225.

[MT] Mizoguchi, F. and Tamaru, H., “Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons”, arXiv:2405.11184.

[M] Mizoguchi, F., “Two-step nilpotent Lie algebras obtained by quivers and geometric structures”, to appear.

[PT] Pouseele, H. and Tirao, P., “Compact symplectic nilmanifolds associated with graphs”, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 9, 1788–1794.

[T] Tamaru, H., “Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds”, Math. Ann. **351** (2011), no. 1, 51–66.